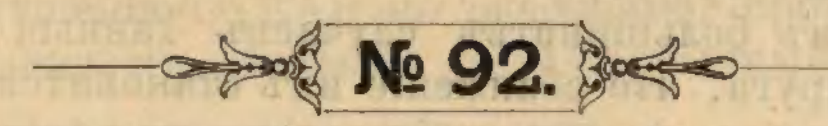
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 92.

VIII Сем. 25 Марта 1890 г. № 8.

ЗНАЧЕНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ въ тригонометріи.

Извѣстно, что каждой геометрической задачѣ на построеніе соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная тригонометрическая задача и обратно. Если разсматривать только тѣ задачи, которыя рѣшаются циркулемъ и линейкой, то для рѣшенія фигуръ съ помощью тригонометріи можно указать два способа.

Первый и обычный способъ состоитъ въ томъ, что изъ чертежа (а иногда и безъ чертежа), на основаніи формулъ треугольника, получаютъ столько уравненій, сколько выбрано неизвѣстныхъ; комбинируя эти уравненія, доходятъ до опредѣленія искомыхъ. Второй способъ состоитъ въ томъ, что сначала находятъ рѣшеніе соотвѣтствующей геометрической задачи; именно, проведеніемъ вспомогательныхъ линій (спрямленіемъ, перенесеніемъ частей фигуры, вращеніемъ ихъ около оси, обертываніемъ) данную задачу приводятъ къ болѣе простой задачѣ такъ, какъ это дѣлается въ геометрическихъ задачахъ на построеніе; вновь полученную задачу рѣшаютъ тригонометрически или непосредственно, или примѣняя первый способъ сравнительно въ болѣе легкой формѣ; результатъ или даетъ искомое сразу, или требуетъ небольшого добавочнаго вычисленія. Первый способъ основанъ на болѣе или менѣе удачномъ сочетаніи формулъ; второй—главнымъ образомъ на умѣньи пользоваться геометрическими методами построенія. Вся сила перваго способа обнаруживается за тѣми предѣлами, которыми мы себя здѣсь ограничили; напротивъ того второй способъ имѣетъ наибольшую силу именно въ этихъ предѣлахъ—приблизительно въ курсахъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Къ сожалѣнію, учащіеся совершенно не пользуются вторымъ способомъ для рѣшенія тригонометрическихъ задачъ и въ этомъ отношеніи знаніе геометрическихъ методовъ пропадаетъ у нихъ даромъ. Обращая вниманіе на это обстоятельство, авторъ вовсе не стремится уменьшить значенія комбинированія формулъ, а только хочетъ указать на слѣдующіе выводы, которые ниже, думается, достаточно выяснены.

1. Когда примѣнимы оба способа, именно, когда данныя и искомыя образуютъ фигуру и не удалены другъ отъ друга настолько, что становится неизбѣжнымъ ихъ сближеніе геометрическими пріемами, второй способъ вообще даетъ результаты болѣе простымъ и короткимъ путемъ. Примѣры: 1, 2, 5.

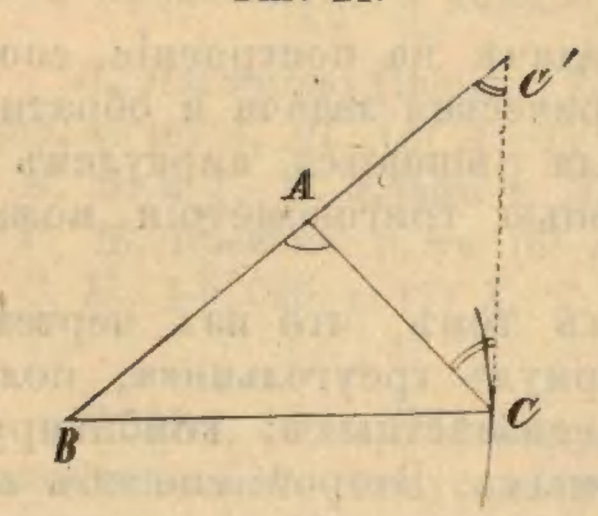
2. Вопросы, допускающіе, повидимому, только первый способъ, очень рѣдки и должны быть отнесены къ частнымъ случаямъ. Въ самомъ дѣлѣ, появленіе задачъ, обманчиво не поддающихся чисто геометрическому рѣшенію, происходитъ отъ нашей ненаходчивости въ построеніяхъ. Въ этихъ случаяхъ чисто геометрическую задачу слѣдуетъ рѣшать съ помощью тригонометріи. Примѣры: 3, 4.

3. Въ огромномъ большинствѣ случаевъ данныя и искомыя такъ удалены другъ отъ друга, что сближеніе ихъ становится необходимымъ— въ этихъ случаяхъ тригонометрическія задачи, за рѣдкими исключеніями, рѣшаются только вторымъ способомъ. Примѣры: 6, 7 и частью 8.

Для поясненія сказаннаго достаточно слѣдующихъ примѣровъ, которые передѣланы въ двухъ формахъ, геометрической и тригонометрической.

1. Рѣшить треугольникъ, зная A, a, b+c.

Фиг. 21.



Рѣш. геом. Ломаную BAC (фиг. 21) выпрямимъ въ прямую BAC_1; тогда уголъ C_1 равенъ половинѣ угла A. Такъ какъ A отстоитъ одинаково отъ C и C_1, то задача приведена къ слѣд.: „построить $\triangle BC_1C$, зная BC_1, BC и C_1". Точка C опредѣлится пересѣченіемъ дуги и прямой C_1C.

Рѣш. тригоном. Выпрямивъ ломаную BAC въ прямую BAC_1, рѣшаемъ $\triangle BC_1C$ по двумъ сторонамъ и углу и находимъ

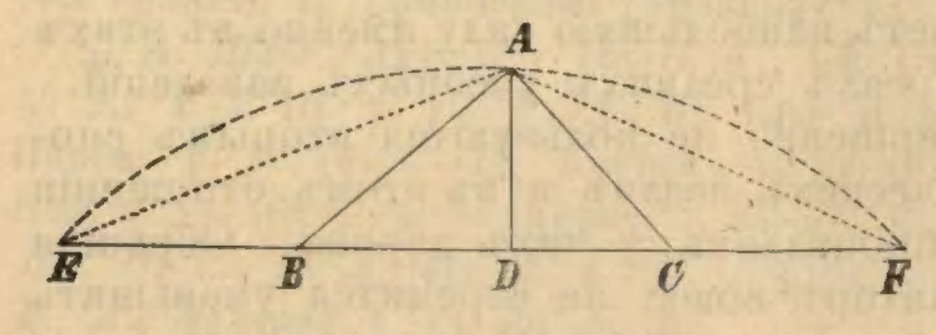
$\operatorname{Sin}\left(C+\frac{A}{2}\right)=\frac{(b+c).\ \operatorname{Sin}\frac{A}{2}}{a}$—формула для опредѣленія C, не менѣе удобная, чѣмъ та*), которая получится при рѣшеніи $\triangle ABC$ обычными способами. Опредѣливъ C, легко рѣшить весь $\triangle ABC$.

То же самое встрѣтимъ, рѣшая треугольникъ по даннымъ A, a, $b-c$ и A, b, $a\pm c$.

2. Рѣшить треугольникъ, зная A, h_a и 2p.

Рѣш. геом Выпрямымъ ломаныя ABC и BCA (фиг. 22) въ прямыя EBC и FCB; тогда

Фиг. 22.



$$\angle EAF=90^\circ+\frac{A}{2},\ EF=2p.$$

Такъ какъ точки B и C равноотстоятъ отъ точекъ A и E, A и F, то вопросъ приведенъ къ

---

*) $\operatorname{Cos}\frac{B-C}{2}=\frac{(b+c)\operatorname{Sin}\frac{A}{2}}{a}$—получается отъ сложенія равенствъ

$$\frac{b}{a}=\frac{\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}A} \text{ и } \frac{c}{a}=\frac{\operatorname{Sin}C}{\operatorname{Sin}A}.$$

построенію треугольника по основанію, противолежащему углу и высотѣ (EF, $\angle$EAF и AD). Отложивъ $EF=2p$, найдемъ точку A въ пересѣченіи параллели основанія и дуги, вмѣщающей извѣстный уголъ.

Рѣш. тригон. Выпрямивъ ломаныя ABC и ACB, получаемъ $\triangle$EAF, въ которомъ углы E и F вдвое менѣе угловъ B и C; поэтому вопросъ приводится къ рѣшенію $\triangle$EAF по основанію, противолежащему углу и высотѣ. Примѣняемъ къ рѣшенію $\triangle$EAF обычный способъ и находимъ:

$$ED=h_a\text{ctg}E \quad \text{и} \quad DF=h_a\text{ctg}F, \tag{1}$$

откуда

$$\frac{2p}{h_a}=\text{ctg}E+\text{ctg}F=\frac{\text{Sin}(E+F)}{\text{Sin}E.\text{Sin}F}; \tag{2}$$

но

$$\text{Sin}(E+F)=\text{Sin}\left(\frac{B+C}{2}\right)=\text{Cos}\frac{A}{2};\ \text{Sin}E.\text{Sin}F=-\frac{1}{2}[\text{Cos}(E+F)-\text{Cos}(E-F)];$$

сдѣлавъ подстановку, получимъ:

$$\text{Cos}(E-F)-\text{Sin}\frac{A}{2}=\frac{h_a\text{Cos}\frac{A}{2}}{p}. \tag{3}$$

Изъ этого уравненія опредѣлится E—F, а слѣд., углы B и C.

Для сравненія обоихъ способовъ рѣшенія фигуръ приводимъ рѣшеніе по первому способу.

Изъ $\triangle\triangle$DBA и CBA находимъ:

$$BD+DC=\frac{h_a\text{Sin}(B+C)}{\text{Sin}B.\text{Sin}C},\ AB+AC=\frac{h_a[\text{Sin}B+\text{Sin}C]}{\text{Sin}B.\text{Sin}C},$$

откуда

$$\frac{2p}{h_a}=\frac{2\text{Sin}\frac{B+C}{2}\cdot\left[\text{Cos}\frac{B-C}{2}+\text{Cos}\frac{B+C}{2}\right]}{\text{Sin}B.\text{Sin}C}$$

или

$$\frac{2p}{h_a}=\frac{2\text{Cos}\frac{A}{2}.2\text{Cos}\frac{B}{2}.\ \text{Cos}\frac{C}{2}}{4\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Cos}\frac{B}{2}\ \text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\frac{C}{2}},$$

откуда

$$\frac{2p}{h_a}=\frac{\text{Cos}\frac{A}{2}}{\text{Sin}\frac{B}{2}\ \text{Sin}\frac{C}{2}}.$$

Это уравненіе сходно съ ур. (2); почти вся работа является лишнею сравнительно съ вышеуказаннымъ рѣшеніемъ—остальное одинаково для обоихъ способовъ.

3. Построить треугольникъ, зная $2p$, h_a *и* $B-C$.

Эта задача принадлежитъ къ тѣмъ, весьма немногимъ, задачамъ, которыя должны имѣть чисто геометрическое рѣшеніе, но которымъ, насколько извѣстно автору, такого рѣшенія еще не дано*). Покажемъ вкратцѣ, какъ сдѣлать требуемое построеніе съ помощью тригонометріи.

Въ урав. (3) полагаемъ $E-F=\alpha$, $\frac{A}{2}=x$ и строимъ прямую k, удовлетворяющую уравненію $k=p\operatorname{Cos}\alpha$. Тогда получимъ

$$k-p\operatorname{Sin}x=h_a\operatorname{Cos}x,$$

откуда

$$m^2\operatorname{Sin}^2x-2n^2\operatorname{Sin}x+q^2=0,$$

гдѣ прямыя m, n и q опредѣляются уравненіями:

$$m^2=p^2+h_a^2,\quad n^2=pk,\quad q^2=k^2-h_a^2.$$

Прямыя m, n и q построить легко. Затѣмъ

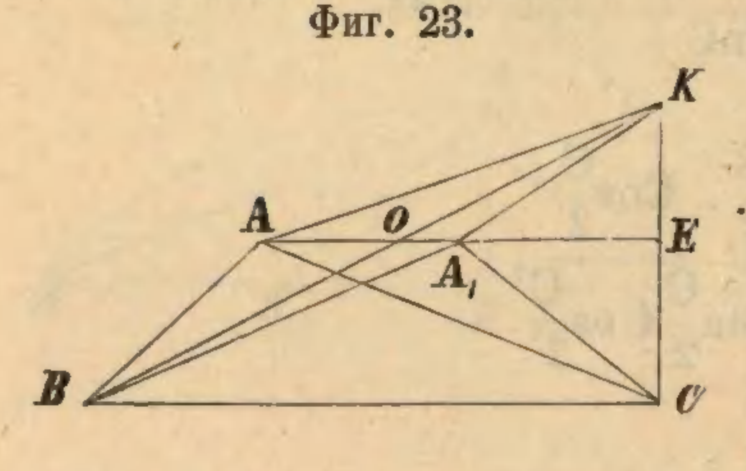
$$\operatorname{Sin}x=\frac{n^2\pm\sqrt{n^4-m^2q^2}}{m^2}.$$

---

*) Когда статья была уже набрана, авторъ прислалъ нижеслѣдующее рѣшеніе этой задачи.

Выпрямимъ ABC и ACB (см. фиг. 22) въ прямыя EBC и FCB; тогда углы E и F суть половины угловъ B и C; слѣд., разность E—F извѣстна, и задача приведена къ слѣдующей: „построить треугольникъ, зная a, h_a и B—C“. (Эта задача есть у Петерсена и у меня за № 314 и 450). Послѣдняя задача рѣшается слѣдующимъ образомъ. Треугольникъ BAC (фиг. 23) перевернемъ въ положеніе BA_1C; прямыя BA и BA_1 перенесемъ параллельно въ A_1K и AK. Такъ какъ $AA_1 \parallel BC$ и BO=OK, то легко доказать, что KE=EC, а потому $\angle$KCB прямой и KC равно $2h_a$; слѣд., прямая BK извѣстна. Такъ какъ $\angle ABA_1=B-C$, то $\angle$BAK извѣстенъ; поэтому, описывая на BK дугу, вмѣщающую этотъ послѣдній уголъ, опредѣлимъ A въ пересѣченіи параллели AA_1 съ дугою.

Фиг. 23.



Тригон. рѣшеніе. Можно рѣшить $\triangle$BAK по основанію BK, углу BAK и угламъ AOK и AOB, которые опредѣлятся послѣ рѣшенія $\triangle$KOE, въ которомъ извѣстны OK и OE. (Болѣе удобное рѣшеніе, основанное на геометрическомъ построеніи, показано въ примѣрѣ за № 2—см. ур. (3)).

Построимъ прямыя, опредѣляемыя слѣдующими уравненіями:

$$y^2=n^2-mq,\quad z^2=n^2+mq,\quad t^2=n^2+yz.$$

Тогда одно изъ рѣшеній будетъ:

$$\mathrm{Sin}x=\frac{t^2}{m^2}.$$

Для построенія угла x строимъ $\triangle GHI$, въ которомъ $H=90^\circ$, $GH=t$, $HI=m$; затѣмъ опускаемъ $HK\perp GI$. Тогда

$$\mathrm{Sin}x=\frac{GK}{KI},$$

откуда легко построить x, а затѣмъ и весь треугольникъ.

4. *Построить треугольникъ, зная a, m_a и $B-C$.*

Эта задача такова же, какъ и предыдущая. Построеніе можно сдѣлать, руководясь уравненіемъ

$$\mathrm{tg}^2x-2k\,\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^2\varphi=0.$$

5. *Съ вершины B мачты корабля виденъ огонь маяка CD подъ угломъ α съ горизонтальной плоскостью; изображеніе огня видно изъ B подъ угломъ β. Опредѣлить вышину огня надъ уровнемъ моря, если вершина B находится отъ уровня моря въ разстояніи, равномъ h.*

Фиг. 24.

Рѣш. геом. Повернемъ $\triangle CBH$ (фиг. 24) въ положеніе FBH; тогда можно построить $\triangle EBF$, такъ какъ $EF=2h$, $\angle EBF=\beta-\alpha$ и $\angle EFB=90^\circ+\alpha$. Затѣмъ уже можно построить $\triangle HBF$.

Рѣш. тригон. Сдѣлавъ, какъ сказано, изъ $\triangle FBE$ находимъ

$$BF=\frac{2h\mathrm{Cos}\beta}{\mathrm{Sin}(\beta-\alpha)};$$

но такъ какъ

$$FH=BF\mathrm{Sin}\alpha,$$

то

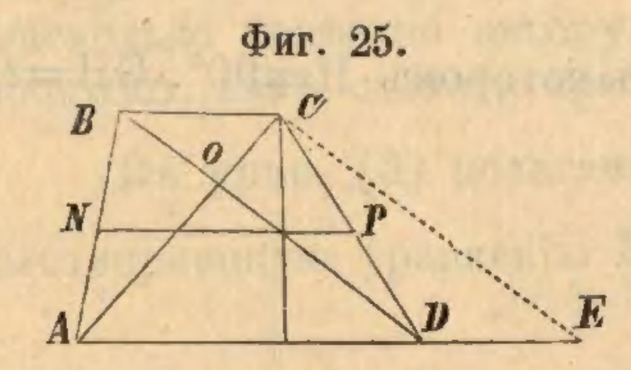
$$CD=\frac{2h\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Sin}(\beta-\alpha)}+h.$$

Рѣшеніе, не опирающееся на геометрическій методъ повертыванія, основано на преобразованіи равенства EH—HC=2h и нѣсколько труднѣе.

Вмѣсто угловъ α и β, могло быть дано EB—BC и C—E; рѣшеніе не перемѣнится.

6. Рѣшить трапецію ABCD, зная сторону CD, уголъ между діагоналями, медіану непараллельныхъ сторонъ и разстояніе параллельныхъ сторонъ.

Фиг. 25.



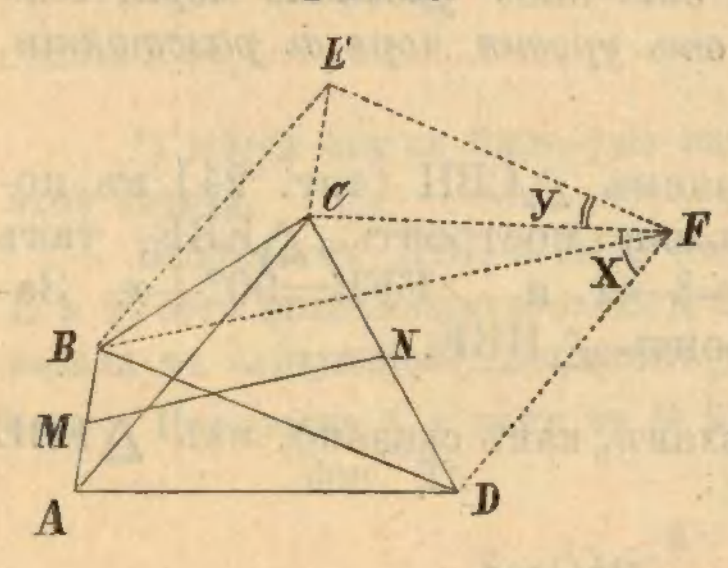
Рѣш. геом. Перенесемъ параллельно BD въ CE (фиг. 25); тогда въ △ACE будутъ извѣстны: основаніе AE, высота и ∠ACE. Построивъ такой треугольникъ (см. № 2), легко опредѣлить точку D, описывая окружность изъ центра C, а затѣмъ— и всю фигуру.

Рѣш. тригон. Перенесемъ BD въ CE; тогда подобно № 2 можно рѣшить △ACE; послѣ этого AC, EC, ∠CAD и ∠BDA (а, слѣд., и ∠CDA и ∠BAD) станутъ извѣстны и легко рѣшить всю трапецію. Безъ помощи геометрическаго построенія задача едва ли рѣшается, такъ какъ безъ перенесенія трудно ввести въ формулы данный уголъ.

7. Рѣшить четыреугольникъ ABCD, зная діагонали, прямую, соединяющую средины AB и CD, углы A и D.

Рѣш. геом. Перенесемъ параллельно AB въ CE и BD въ EF (фиг. 26); тогда составится параллелограммъ BEFD, который легко построить,

Фиг. 26.



такъ какъ въ △BEF извѣстны три стороны (BF=2MN). Такъ какъ прямыя EF и DF видны изъ C подъ извѣстными углами, то точка C опредѣляется пересѣченіемъ двухъ дугъ. Остается обратное перенесеніе.

Рѣш. тригон. Напрасно было бы рѣшать эту задачу первымъ способомъ, такъ какъ данныя, не составляя опредѣленной фигуры, находятся въ положеніи, изъ котораго едва ли возможно извлечь уравненія. Но, сдѣлавъ перенесеніе, мы можемъ рѣшить фигуру DBEF. Въ самомъ дѣлѣ изъ △BEF можно найти уголъ E, а, слѣд., и ∠DFE; полагая затѣмъ EFC=Y, DFC=X, DFE=F, EF=m, DF=n, находимъ:

$$\frac{CF}{m}=\frac{\operatorname{Sin}(A+Y)}{\operatorname{Sin}A},\quad \frac{CF}{n}=\frac{\operatorname{Sin}(D+X)}{\operatorname{Sin}D},$$

откуда

$$\frac{n}{m}=\frac{\operatorname{Sin}D.\ \operatorname{Sin}(A+Y)}{\operatorname{Sin}A.\ \operatorname{Sin}(D+X)},$$

подставляя $X=F-Y$, получимъ

$$\mathrm{tg}Y=\frac{n\mathrm{Sin}(D+F)-m\mathrm{Sin}D}{n\mathrm{Cos}(D+F)+m\mathrm{Sin}D.\mathrm{Cotg}A}.$$

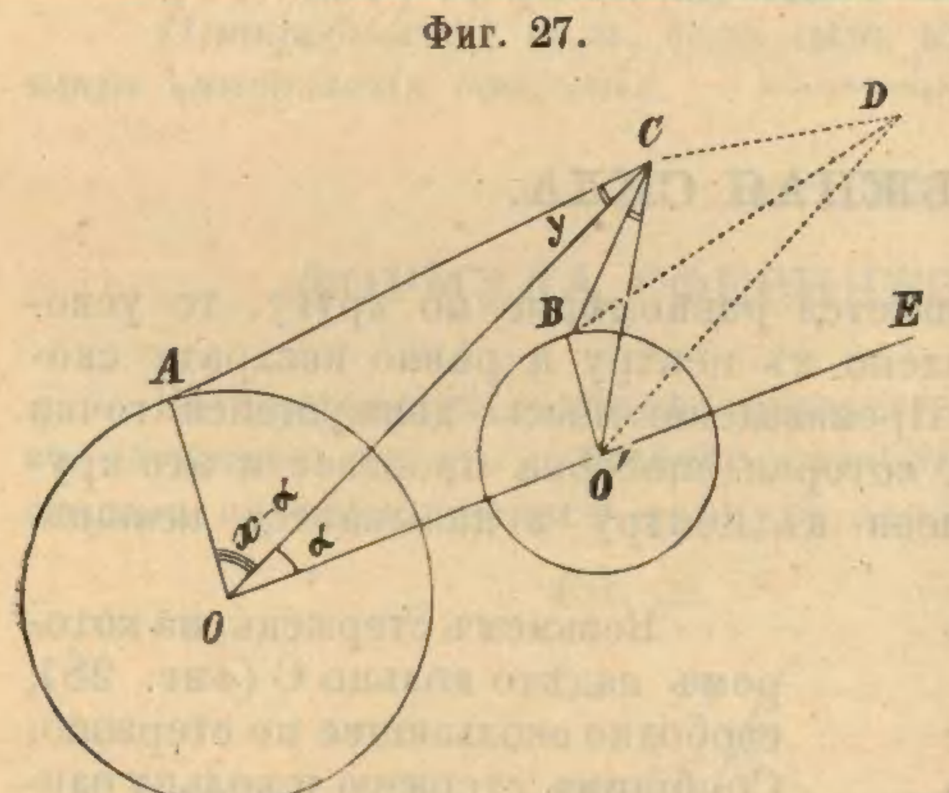
Послѣ опредѣленія Y и X легко рѣшить $\triangle DCF$ и $\triangle ECF$ и найти всѣ искомыя части. Способъ рѣшенія существенно не измѣнится, если вмѣсто MN данъ уголъ между AC и BD.

Обращаемъ вниманіе на цѣлый рядъ весьма интересныхъ задачъ подобнаго же рода*). Переводя эти задачи на языкъ тригонометріи, легко убѣдиться, что въ огромномъ большинствѣ случаевъ ихъ можно рѣшить только съ помощью геометрическихъ построеній, первый же способъ, если и дастъ уравненіе, то въ большинствѣ случаевъ или очень сложное, или съ трудомъ разрѣшимое элементарными пріемами. Въ виду интереса, представляемаго этимъ вопросомъ, беремъ совершенно наудачу еще одинъ примѣръ изъ указаннаго ряда задачъ (№ 442).

8. Даны два круга O и O_1. Провести два параллельные радіуса OA и O_1B такъ, чтобъ они изъ данной точки C были видны подъ равными углами.

Рѣш геом. Умножимъ $\triangle AOC$ на отношеніе $O_1B:OA$ (въ данномъ случаѣ на 1:2), и перенесемъ его параллельно такъ, чтобъ точка O, не мѣнявшая мѣста, пришла въ O_1, а новое положеніе точки A—въ точку B. Тогда точка C придетъ въ точку D, положеніе которой извѣстно, такъ какъ

Фиг. 27.



$$\angle DO_1E=\angle COO_1$$

и

$$DO_1=CO:(AO:O_1B).$$

Такъ какъ

$$\angle O_1DB=\angle O_1CB,$$

то точки D, C, B и O_1 лежатъ на одной окружности. Поэтому можно опредѣлить точку B, проводя окружность черезъ точку C, D и O_1.

Тригонометрическая формула и рѣшеніе будутъ слѣдующія. Даны радіусы двухъ круговъ O и O_1 (фиг. 27), а также разстояніе OO_1. Изъ точки C, разстоянія

*) „Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе" И. Александрова, №№ 378—461, изд. 3-е.

„Методы и теоріи геометрическихъ задачъ на построеніе" Ю. Петерсена, №№ 246—335.

которой отъ O и O_1 даны, параллельные радіусы OA и O_1B видны подъ равными углами. Вычислить эти углы. Преобразовавъ $\triangle AOC$ въ $\triangle O_1BD$, замѣчаемъ, что можно рѣшить $\triangle CO_1D$, такъ какъ въ немъ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними ($\angle CO_1D = \angle OCO_1$, который вычисляется изъ $\triangle OCO_1$). Затѣмъ по формулѣ $R = \frac{a}{2\operatorname{Sin} A}$ можно вычислить радіусъ круга, описаннаго около $\triangle CO_1D$. Послѣ этого въ $\triangle BO_1D$ будутъ извѣстны двѣ стороны и радіусъ описаннаго круга—такой треугольникъ рѣшить легко.

Обычный пріемъ рѣшенія даетъ слѣдующій отвѣтъ. Пусть

$$OC:OA = m,\ O_1B:O_1C = n,\ \angle COO_1 = \alpha,\ CO_1E = \beta,\ \angle AOO_1 = x,\ \angle ACO = y.$$

Изъ $\triangle ACO$ и $\triangle BO_1C$ получимъ:

$$m = \operatorname{Cos}(x-\alpha) + \operatorname{Sin}(x-\alpha).\operatorname{Cotg} y,\quad n = \operatorname{Cos}(x-\beta) + \operatorname{Sin}(x-\beta).\operatorname{Cotg} y.$$

Исключая изъ этихъ уравненій $\operatorname{Cotg} y$, получимъ

$$\frac{m - \operatorname{Cos}(x-\alpha)}{\operatorname{Sin}(x-\alpha)} = \frac{n - \operatorname{Cos}(x-\beta)}{\operatorname{Sin}(x-\beta)}$$

или

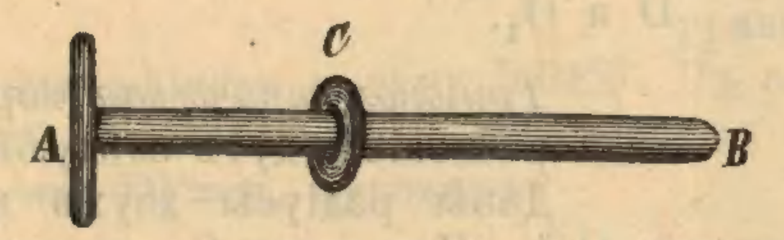
$$m\operatorname{Sin}(x-\beta) - n\operatorname{Sin}(x-\alpha) = \operatorname{Sin}(\alpha-\beta).$$

При неравныхъ m и n это уравненіе очень сложное, но изъ него можно опредѣлить $\operatorname{Sin} x$. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

ЦЕНТРОБѢЖНАЯ СИЛА.

Если матеріальная точка движется равномѣрно по кругу, то ускореніе при этомъ движеніи направлено къ центру и равно квадрату скорости, раздѣленному на радіусъ. Произведеніе массы движущейся точки на это ускореніе равно той силѣ, которая способна произвести это круговое движеніе. Эта сила направлена къ центру и называется *центростремительною*.

Фиг. 28.



Возьмемъ стержень, на которомъ надѣто кольцо C (фиг. 28), свободно скользящее по стержню. Сообщимъ стержню и кольцу одинаковую скорость по направленію длины стержня отъ A къ B. Движеніе будетъ равномѣрное, прямолинейное, кольцо будетъ сохранять свое положеніе на стержнѣ. Приложимъ теперь къ стержню (но не къ кольцу) нѣкоторую силу по направленію движенія. Скорость стержня возрастаетъ, скорость кольца остается прежняя. Отсюда произойдетъ то, что кольцо C будетъ передвигаться по стержню въ сторону обратную общему движенію, т. е. будетъ приближаться къ краю A.

Положимъ теперь, что мы замедляемъ движеніе стержня. А такъ

какъ скорость кольца C остается прежнею, то оно будетъ передвигаться по стержню по направленію движенія, т. е. будетъ приближаться къ краю B.

Итакъ съ измѣненіемъ скорости стержня кольцо C передвигается по стержню; ускореніе *относительнаго движенія* кольца C равно по величинѣ, но противоположно по направленію, ускоренію стержня.

Примѣръ кольца со стержнемъ поможетъ намъ выяснить дальнѣйшее общее положеніе.

Возьмемъ произвольную систему матеріальныхъ точекъ и приведемъ ее въ произвольное неравномѣрное движеніе. Въ какой нибудь моментъ освободимъ какую нибудь матеріальную точку C отъ ея связей съ другими точками и отъ дѣйствующихъ силъ. Точка C, сдѣлавшись свободною, сохранитъ пріобрѣтенную скорость, а система будетъ продолжать двигаться неравномѣрно. Вслѣдствіе этого точка C будетъ перемѣщаться относительно остальной системы матеріальныхъ точекъ. Ясно, что ускореніе этого относительнаго движенія равно и противоположно тому ускоренію, которое имѣла бы эта точка C, если бы она была связана съ остальною системою. Сила, способная произвести подобное относительное движеніе, называется *силою инерціи*. Эта сила равна и противоположна по направленію силѣ, дѣйствующей на точку C.

Положимъ теперь, что матеріальная система движется равномѣрно около постоянной оси. Сила, дѣйствующая на каждую точку, направлена къ центру круга, описываемаго этою точкою,—это центростремительная сила. Сила инерціи равна центростремительной силѣ, но направлена въ противоположную сторону, и потому называется *центробѣжною силою*.

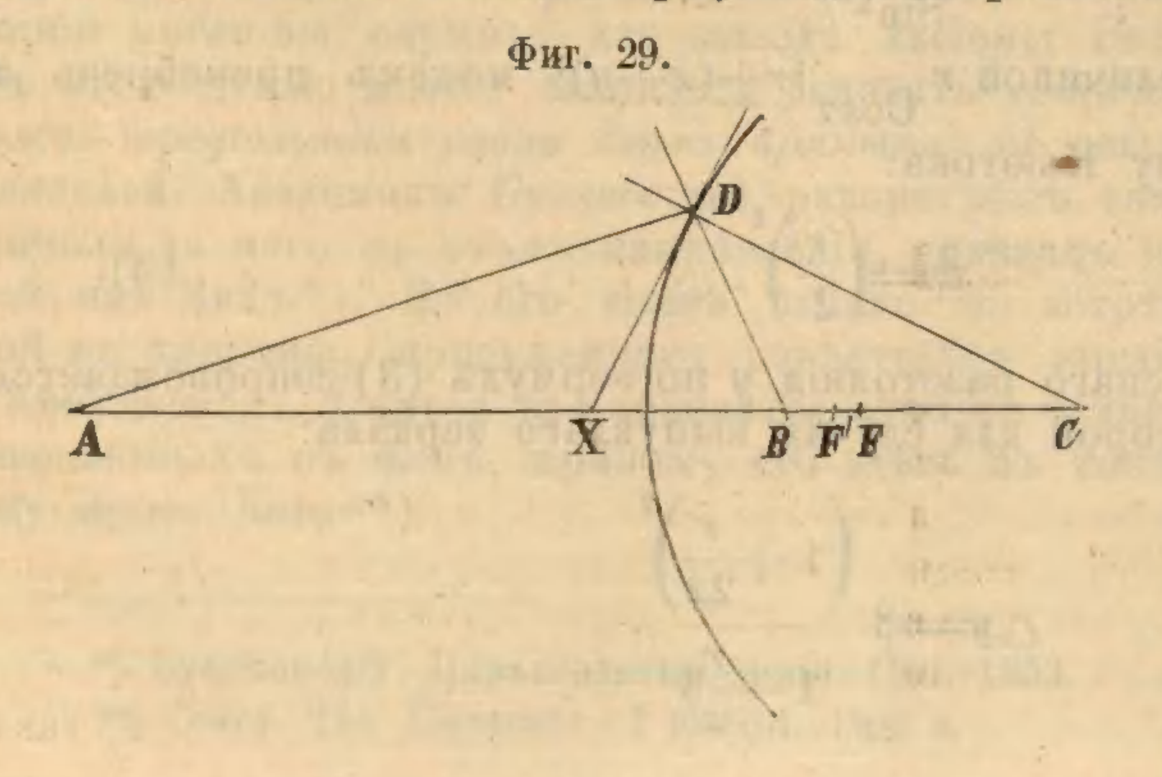
Центробѣжная сила, есть сила инерціи, развивающаяся при измѣненіи направленія движенія.

Проф. *В. Ермаковъ.*

ФОРМУЛА СФЕРИЧЕСКИХЪ ЗЕРКАЛЪ.

Въ настоящей замѣткѣ излагается выводъ формулы, позволяющей съ легкостью судить о степени точности при опредѣленіи фокуснаго разстоянія по обыкновенной формулѣ для сферическихъ зеркалъ.

Фиг. 29.



Пусть будетъ дано сферическое зеркало (выпуклое) (фиг. 29), C его центръ, AC главная ось, A—свѣтящаяся точка, B—точка пересѣченія продолженія отраженнаго луча съ осью, X—точка пересѣченія оси съ касательной къ сферѣ проведенной въ плоскости чертежа черезъ точку D паденія луча. Такъ

какъ A, X, B и C гармоническія точки, ибо прямыя DX и DC внутренній и внѣшній биссекторы угла ADB, то

$$\frac{AX}{XB}=\frac{AC}{CB}.$$

Пусть

$$AX=d,\ XB=f,\ XC=\rho \text{ и } \angle DCA=\alpha,$$

тогда

$$\frac{1}{f}-\frac{1}{d}=\frac{2}{\rho}.$$

Пусть точка дѣленія XC пополамъ будетъ F′ и пусть $AF'=x'$ и $BF'=y'$; имѣемъ

$$x'y'=\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Пусть F есть точка, удаленная отъ центра C на разстояніе $\frac{r}{2}$, гдѣ r радіусъ сферы. Будемъ опредѣлять положенія точекъ A и B относительно точки F; назвавъ разстоянія AF и BF черезъ x и y, имѣемъ

$$x'=x-z \quad \text{и} \quad y'=y-z;$$

гдѣ

$$z=FF'=\frac{1}{2}(\rho-r)=r\frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha/_2}{\operatorname{Cos}\alpha}.$$

Подставивъ значенія x' и y' въ уравненіе (1), получимъ

$$xy=\left(\frac{r}{2}\right)^2+r\frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha/_2}{\operatorname{Cos}\alpha}[r\pm(x+y)] \ldots\ldots (2)$$

При суммѣ $x+y$ поставлено два знака $\pm$; $+$ относится къ выпуклому зеркалу,—же къ вогнутому.

Выводъ формулы (2) и составляетъ цѣль настоящей замѣтки. Когда α очень малый уголъ, величиной $r\frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha/_2}{\operatorname{Cos}\alpha}[r\pm(x+y)]$ можемъ пренебречь и тогда получимъ формулу Ньютона:

$$xy=\left(\frac{r}{2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Опредѣленіе фокуснаго разстоянія y по формулѣ (3) сопровождается ошибкой, величина которой для случая выпуклаго зеркала:

$$\triangle y=r\beta\frac{\left(1+\frac{r}{2x}\right)^2}{1-\frac{r}{x}\beta}$$

и для вогнутаго зеркала

$$\triangle y = -r\beta \frac{\left(1-\frac{r}{2x}\right)^2}{1+\frac{r}{x}\beta},$$

гдѣ

$$\beta = \frac{\mathrm{Sin}^2 \alpha/_2}{\mathrm{Cos}\alpha}.$$

По мѣрѣ увеличенія x величина ошибки уменьшается и приближается къ $\pm r\beta$. Если α около 5°, $\beta=0{,}002$ и предѣльная величина ошибки $\pm 0{,}002r$. Въ случаѣ вогнутаго зеркала, какъ абсолютная ошибка $\triangle y$, такъ и относительная $\frac{\triangle y}{y}$ могутъ достигать большихъ значеній при малыхъ величинахъ x; тогда ошибкой нельзя пренебрегать, иначе сказать, для малыхъ величинъ x вогнутое зеркало обладаетъ большою сферическою аберраціею и формула (3) уже не пригодна. Когда $x=0$, $y_0 = r + \frac{r}{4\beta}$. Вогнутое зеркало обладаетъ наименьшей сферической аберраціей для значеній x близкихъ къ $\frac{r}{2}$, ибо тогда $\triangle y$ близко къ 0.

Проф. *Н. Слугиновъ* (Казань).

ПО ПОВОДУ 11-Й АКСІОМЫ ЭВКЛИДА.

Теорія параллельныхъ прямыхъ, построенная Эвклидомъ на извѣстной его 11-й аксіомѣ, издавна обращала на себя вниманіе геометровъ, такъ-какъ упомянутая аксіома не можетъ считаться очевидной. Съ начала V в. по Р. Х. (*Проклъ*) до настоящаго столѣтія включительно (*Лежандръ*, *Шультенъ* и др.) геометры старались найти теорему, доказательство которой могло-бы служить для вывода аксіомы Эвклида, какъ слѣдствія. Съ этою цѣлью многіе старались доказать теорему: *сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ*, не ссылаясь на свойства параллелей. Академикъ *Буняковскій*, разсмотрѣвъ важнѣйшія попытки, сдѣланныя до него въ этомъ направленіи, показалъ несостоятельность каждой изъ нихъ *). Въ его книгѣ однако не встрѣчается доказательства той-же теоремы, придуманнаго извѣстнымъ англійскимъ математикомъ *Гамильтономъ*. Считая это доказательство не безъинтереснымъ для лицъ, незнакомыхъ съ нимъ, привожу его здѣсь въ томъ видѣ, какой придалъ ему проф. *Кази* **).

---

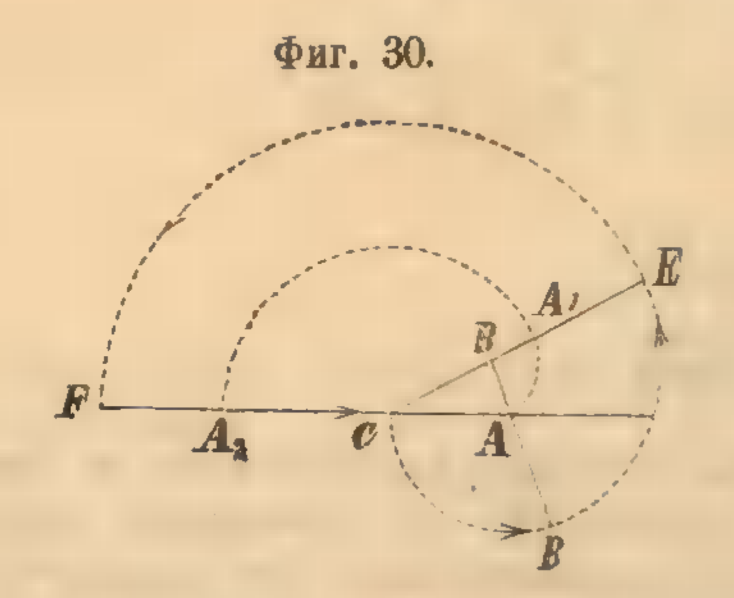
*) Буняковскій, Параллельныя линіи. Спб. 1853.

**) Casey. The Elements of Euclid. 1889 г.

Въ треугольникѣ ABC продолжимъ стороны BA, CB и AC соотвѣтственно до точекъ D, E и F, такъ чтобы

$$\overline{AD}=\overline{AC}, \quad \overline{BE}=\overline{BD}, \quad \overline{CF}=\overline{CE}.$$

Фиг. 30.



Образовавшiеся внѣшнiе углы треугольника обозначимъ черезъ A′, B′, C′ (фиг. 30). Повернемъ сторону AC около вершины A на уголъ A′, т. е. до совпаденiя ея съ AD; затѣмъ прямую BD повернемъ на уголъ B′ около вершины B до совпаденiя ея съ BE; сторона AC приметъ тогда положенiе A_1E; повернувъ, наконецъ, прямую CE около C на уголъ C′, т. е. до совпаденiя ея съ CF, приведемъ сторону AC въ положенiе A_2F. Такимъ образомъ сторона AC, отрѣзокъ прямой AF, послѣ вращенiя въ одну сторону на уголъ $A'+B'+C'$, заняла положенiе A_2F на той-же прямой, изъ котораго она, однимъ передвиженiемъ по AF, безъ вращенiя, можетъ быть приведена въ первоначальное положенiе AC. Слѣд. уголъ вращенiя $A'+B'+C'=4d$; но сумма трехъ паръ смежныхъ угловъ $(A+A')+(B+B')+(C+C')=6d$; поэтому сумма внутреннихъ угловъ треугольника $A+B+C=2d$.

Въ чемъ заключается слабая сторона этого доказательства?

Дм. Ефремовъ (Иваново-Возн.).

ПРИЛОЖЕНIЕ ОГИБАЮЩИХЪ ЛИНIЙ

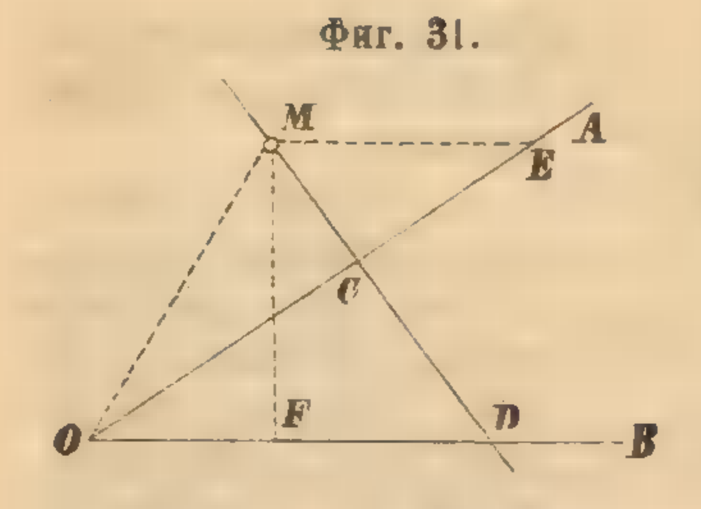
къ рѣшенiю планиметрическихъ задачъ на построенiе.

На стр. 240 „Журнала Элементарной Математики“ за 1884 годъ напечатанъ „отвѣтъ редакцiи“ такого содержанiя:

„Въ редакцiю нѣсколько разъ обращались за разъясненiями по поводу „задачи: Черезъ данную точку провесть прямую такъ, чтобы ея отрѣ-„зокъ, заключенный между сторонами даннаго угла, имѣлъ данную „длину.—Ваши замѣчанiя, что задача въ общемъ видѣ не можетъ быть „рѣшена при помощи циркуля и линейки, совершенно вѣрны...... Если „отрѣзокъ на одной изъ сторонъ угла обозначимъ черезъ x и выразимъ „его черезъ данныя величины, то получимъ уравненiе четвертой степени.“

Дѣйствительно, если данный уголъ AOB, данная точка M (фиг. 31) (внѣ или внутри угла) и линiя MD искомая—такъ что отрѣзокъ CD имѣетъ данную длину a, то, проводя ME параллельно OB, получаемъ два подобные треугольника MCE и OCD, изъ которыхъ слѣдуетъ:

$$\frac{OD}{CD}=\frac{ME}{MC}.$$



Фиг. 31.

Поставивъ OD=x, MC=y, ME=b, и MO=r, эту пропорцію можемъ записать въ видѣ:

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{y} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Изъ треугольника MOD имѣется:

$$(y+a)^2=x^2+r^2\mp 2xc \quad . \; . \; . \; (2),$$

гдѣ c есть проекція отрѣзка OM на линію OB.

Подставляя величину y изъ 1-го уравненія во 2-е, получаемъ

$$\left(\frac{ab}{x}+a\right)^2=x^2+r^2\mp 2xc,$$

откуда слѣдуетъ:

$$x^4\mp 2cx^3+(r^2-a^2)x^2-2a^2bx-a^2b^2=0.$$

Рѣшеніе этого уравненія средствами начальной алгебры, равно какъ и построеніе, согласно началамъ Евклида, невозможно. Но эти затрудненія устраняются, если приложить для построенія огибающую линію.

Тутъ является вопросъ: что называется огибающею линіею?

Если какая либо линія L движется по извѣстному закону,—сохраняя или измѣняя при этомъ свою форму,—то всѣ ея смежныя положенія L, L_1, L_2..... пересѣкаются въ точкахъ, которыя образуютъ въ совокупности своей нѣкоторую *линію* K, *касательную ко всѣмъ положеніямъ данной кривой*. Такая линія K называется **огибающей.**

Такъ, если окружность L движется такимъ образомъ, что центръ ея находится постоянно на данной {прямой P / окружности O}, то линія, огибающая всѣ положенія, занимаемыя движущеюся окружностью, будетъ состоять изъ двухъ {прямыхъ параллельныхъ прямой P / окружностей концентрическихъ съ окружностью O}

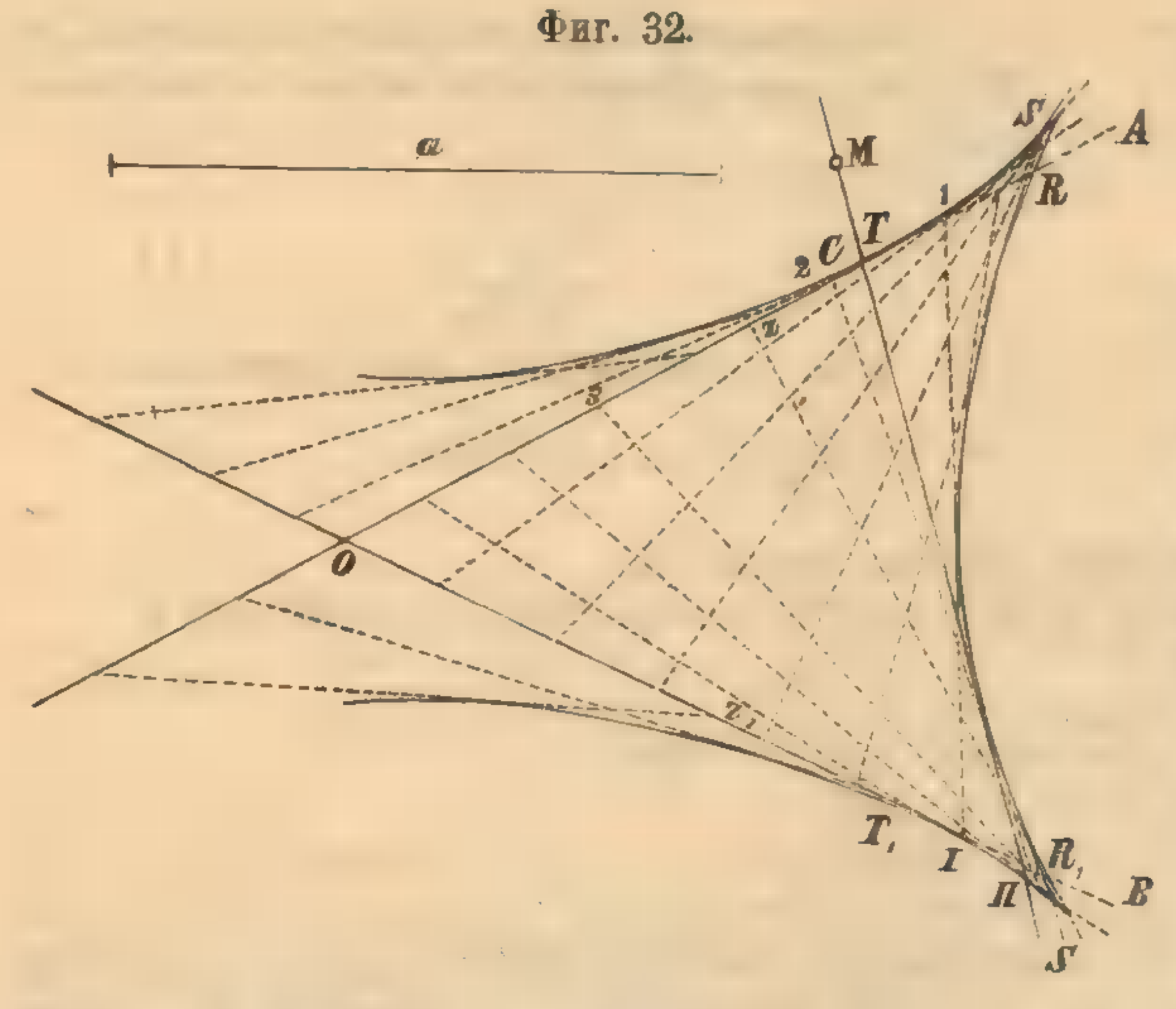
Если къ какой либо кривой K провести возможно большее число касательныхъ T, T_1, T_2......, то линія K будетъ огибающею линіею всѣхъ касательныхъ, и вообще можно сказать, что *всякая кривая есть огибающая линія всѣхъ своихъ касательныхъ.*

Этимъ указаніемъ пользуются весьма часто для вычерчиванія самихъ кривыхъ, напримѣръ строя, на основаніи теоремы Бріаншона, по пяти даннымъ касательнымъ нѣкоторой кривой второй степени—шестую.

Теперь возратимся къ нашей первоначальной задачѣ.

Сначала выполнимъ часть условія, именно проведемъ произвольную прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между сторонами даннаго угла AOB (фиг. 32) имѣлъ данную длину a. Такихъ прямыхъ безчисленное множество, а для построенія нѣкотораго числа ихъ, на одной сторонѣ угла выбираемъ произвольныя точки 1, 2, 3..... и радіусомъ равнымъ данной длинѣ a пересѣкаемъ другую сторону угла въ точкахъ I, II,

Фиг. 32.



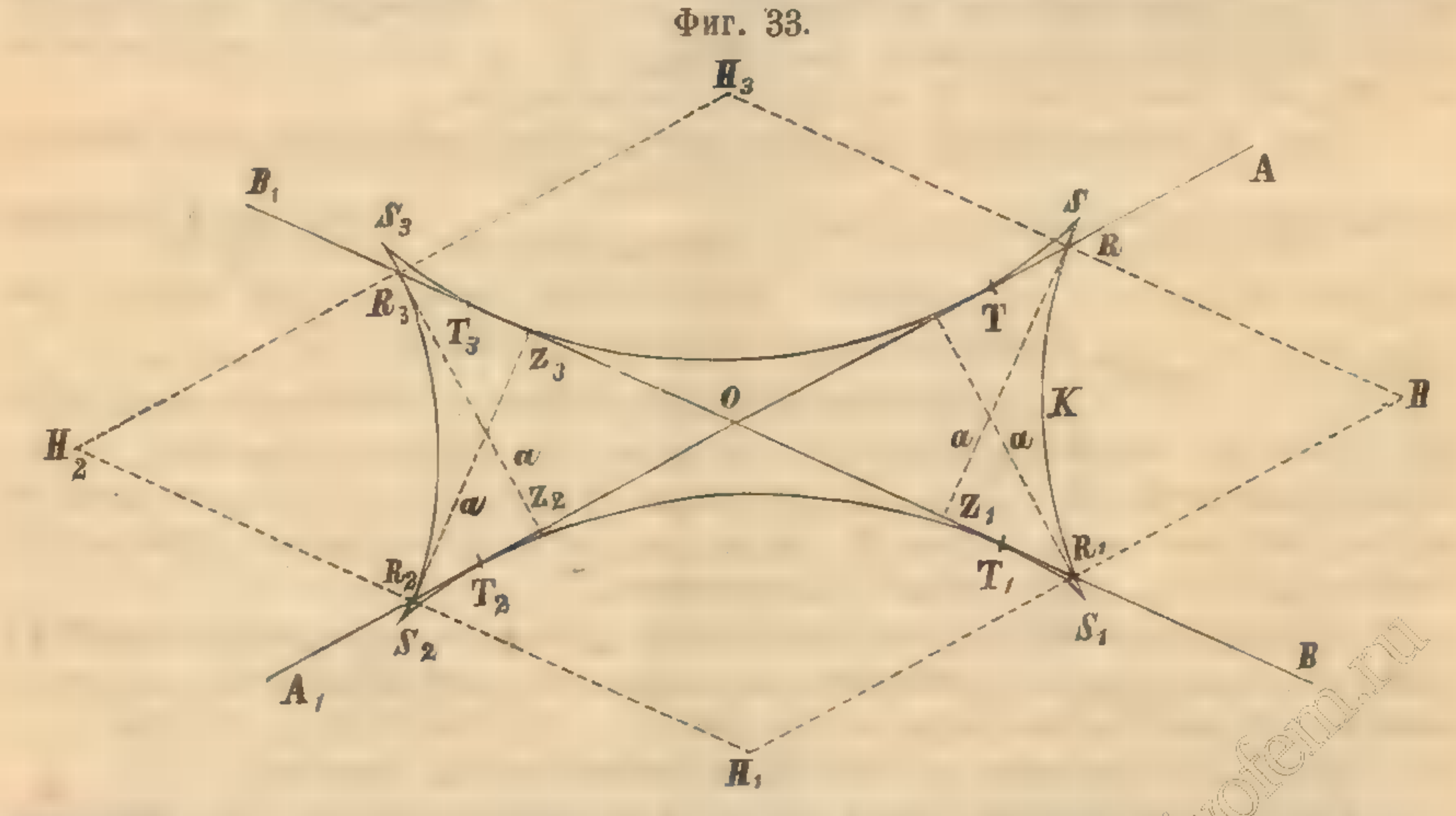
III......, прямыя I 1, II 2, III 3,... суть требуемыя.

Потомъ проводимъ кривую K такъ, чтобы она касалась всѣхъ прямыхъ I1, II2, III3....; это и есть ихъ огибающая, имѣющая, притомъ то свойство, что отрѣзки всѣхъ ея касательныхъ, заключенные между сторонами угла AOB, имѣютъ длину a. Слѣд., если черезъ точку M провести—простымъ приложеніемъ линейки—касательную MN къ кривой K, то длина ея отрѣзка между сторонами угла будетъ a, и линія MN есть искомая.

Остается сказать нѣсколько словъ о кривой K.

Она имѣетъ четыре вѣтви, для построенія которыхъ стоитъ только продолжить стороны угла и въ каждомъ изъ полученныхъ угловъ повторить то же самое построеніе, что и прежде. Кривая имѣетъ четыре точки

Фиг. 33.



возврата S, S_1, S_2, S_3, вообще не лежащія на сторонахъ угла; вся она представлена на (фиг. 33) въ уменьшенномъ видѣ.

Отложивъ отъ вершины O отрѣзокъ a на сторонахъ угла, получаемъ точки прикосновенія T, T_1, T_2, T_3 сторонъ угла съ кривою K.

Построивъ ромбъ $HH_1H_2H_3$, стороны котораго отстоятъ на

разстоянии a отъ сторонъ угла, въ точкахъ R, R_1, R_2, R_3 получаемъ мѣста пересѣченія кривой K со сторонами угла.

Части ST, S_1T_1..... кривой суть огибающія линіи тѣхъ сѣкущихъ, которыя пересѣкаютъ стороны угла въ предѣлахъ отъ вершины O до основаній Z, Z_1... перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ R, R_1... на стороны угла. Съ приближеніемъ точекъ Z, Z_1... къ вершинѣ O, точки R и S приближаются къ T и наконецъ эти три точки совпадутъ, когда Z совпадетъ съ O, т. е. когда данный уголъ AOB прямой. Тогда точки возврата лежатъ на сторонахъ угла и вся огибающая вписана въ ромбъ $HH_1H_2H_3$.

Очевидно, что форма и величина кривой K зависятъ исключительно отъ величины угла и длины отрѣзка a.

Уяснивъ себѣ форму этой кривой, можемъ приступить къ изслѣдованію вопроса.

Если данная точка M лежитъ внѣ фигуры, ограниченной кривою K, то можно провести всего двѣ прямыя, удовлетворяющія условію; а такъ какъ аналитическое рѣшеніе задачи приводитъ къ уравненію 4-й степени, то должно предположить, что есть еще два рѣшенія мнимыя. Но если данная точка лежитъ внутри криволинейной фигуры, то получаются всегда четыре реальныя рѣшенія.

Примѣчаніе 1-е. Когда, выбирая на прямой OA рядъ точекъ 1, 2, 3, 4......, доходимъ до такихъ, что сѣкущія, выходящія изъ нихъ пересѣкаютъ другую сторону BO подъ слишкомъ острымъ угломъ, такъ что пересѣченія неточны, то при продолженіи работы слѣдуетъ выбирать дальнѣйшія точки на прямой BO, а изъ нихъ пересѣкать прямую AO.

Примѣчаніе 2-е. Построивъ большое количество сѣкущихъ, можемъ провести искомую прямую, не вычерчивая самой кривой K.

Примѣчаніе 3-е. Разсмотрѣнная нами задача была рѣшена еще въ древности греческимъ геометромъ Никомедомъ посредствомъ конхоиды.

Ф. Коваржикъ (Полтава).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новый типъ электрическихъ часовъ. Въ 1-омъ № „Bulletin de la société internationale des Electriciens“, за нынѣшній годъ, помѣщенъ рефератъ г. Наполи объ электрическихъ часахъ братьевъ Жапи и К° въ Парижѣ. Новые электрическіе часы ежечасно заводятся магнито-электрической машинкой Грамма, якорь которой вращается отъ дѣйствія одного элемента Лекланше. Электрическіе часы братьевъ Жапи—съ боемъ, чего обыкновенно у такихъ часовъ не бываетъ. Внутреннія части у новыхъ часовъ тѣ-же, что и у обыкновенныхъ, съ тою лишь разницей, что заводный барабанъ одинъ. Отъ часовъ (отъ цыферблата) внизъ спускается рама, въ нижней части которой помѣщается вертикально подковообразный искуственный магнитъ, полюсами вверхъ. Къ полюсамъ придѣланы расширенія изъ мягкаго желѣза, а между ними, на вертикальной оси, вращается кольцо Грамма выше котораго приходится кол-

лекторъ со щетками. Кольцо Грамма насажено на ось только съ треніемъ, но можетъ поворачиваться и отдѣльно, что и случается при перерывѣ тока, когда кольцо вращается нѣкоторое время не поворачивая вала и не вредя заводимой пружины. На вертикальномъ валу Граммова кольца, въ верхней части, находится безконечный винтъ, который заводитъ часовую пружину барабана, прикрѣпленнаго къ колесу, насаженному на холостой стрѣлочный валъ. Спиральная пружина барабана, раскручиваясь, приводитъ въ движеніе якорный спускъ и минутныя колеса.—Во время завода часовъ безконечный винтъ вращаетъ боевое колесо, которое въ это время дѣлаетъ 13 оборотовъ, изъ которыхъ каждый соотвѣтствуетъ одному удару молоточка. Молоточекъ задерживается всякій разъ, какъ онъ сдѣлалъ нужное число ударовъ. Тринадцатый поворотъ колеса размыкаетъ цѣпь, и останавливаетъ вращеніе якоря. Для приданія двигателю равномѣрнаго хода къ валу якоря придѣланъ регуляторъ, крылья котораго, поднимаясь, замедляютъ движеніе кольца и дѣлаютъ бой равномѣрнымъ. *П. П.*

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Засѣданіе Русскаго Физико-Химическаго Общества въ Спб. 6-го Марта 1890 года.

Предсѣдатель Общества Ѳ. Ѳ. Петрушевскій предлагаетъ собранію высказаться по поводу показаннаго на прошломъ засѣданіи усовершенствованнаго фонографа Эдиссона. Члены Общества единогласно подтверждаютъ, что фонографъ Эдиссона вполнѣ хорошо передаетъ какъ пѣніе такъ и простую рѣчь.

По предложенію VIII-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей Физическое Отдѣленіе Общества предполагаетъ открыть въ непродолжительномъ времени постоянное бюро для провѣрки метеорологическихъ приборовъ. Въ скоромъ времени могутъ быть провѣряемы термометры, барометры, анемометры, ареометры, разновѣски, амметры и вольтметры.

Ч. К. Скржинскій излагаетъ о способѣ намотки якоря въ динамо-машинѣ лорда Эльфинстона. Способъ обмотки довольно сложный, ибо машина эта по конструкціи шести-полюсная и представляетъ собою три отдѣльныя машины, соединенныя между собою параллельно. Онъ же сообщаетъ о приборахъ для заряженія аккумуляторовъ. Кромѣ очень наглядныхъ чертежей были показаны въ дѣйствіи автоматическій прерыватель тока Эпштейна, предохранитель Колокольцова, плоскій ареометръ и др.

И. И. Боргманъ излагаетъ свои соображенія по поводу теоріи Пойтинга.

Н. Г. Егоровъ показываетъ опытъ Лоджа, касающійся электрическаго резонанса. При помощи электрической машины и искромѣра заряжаютъ и разряжаютъ Лейденскую банку. Другая Лейденская банка, находясь на нѣкоторомъ разстояніи и не соединенная ни съ однимъ изъ выше названныхъ приборовъ, заряжается и разряжается (даетъ искру между своими обкладками) въ тѣ же моменты какъ и первая банка. Явленіе это не происходитъ если измѣнить въ одну или другую сторону самоиндукцію одной изъ лейденскихъ банокъ. *О. Стр.* (Спб.).

Матем. Отд. Новор. Общ. Естествоиспыт. по вопр. эл. мат. и физики. Одесса. 10 Марта 1890 года.

В. П. Юрасовъ сдѣлалъ сообщеніе „объ умноженіи и дѣленіи дробей въ

школьномъ преподаванiи, въ которомъ старался указать форму опредѣленiй этихъ дѣйствiй, наиболѣе доступную для учащихся, вывести изъ установленныхъ опредѣленiй правила этихъ дѣйствiй и объяснить приложенiе дѣйствiй къ рѣшенiю задачъ.— Ѳ. Н. Милятицкiй сдѣлалъ нѣсколько замѣчанiй объ изображенiяхъ въ зеркалахъ.— Въ заключенiе обсуждался вопросъ о секретаряхъ засѣданiй. Въ рѣшенiе этого вопроса, состоявшееся раньше, внесена слѣдующая поправка. Рѣшено составить списокъ лицъ, желающихъ нести эти обязанности и по этому списку назначать секретарей, освобождая такимъ образомъ отъ исполненiя этихъ обязанностей лицъ, которыя тяготятся ими. *И. Слешинскiй* (Одесса).

ЗАДАЧИ.

№ 44. На дiаметрѣ круга AB возьмемъ произвольную точку C и черезъ нее проведемъ перпендикулярную къ дiаметру прямую MN и двѣ произвольныя хорды DE и FG. Требуется доказать, что прямыя, соединяющiя соотвѣтственные концы этихъ хордъ (DG и FE или DF и EG), пересѣкутъ перпендикиляръ MN въ точкахъ равноудаленныхъ отъ дiаметра AB. *Н. Соловьевъ* (Москва).

№ 45. Черезъ точку M, взятую внутри шара радiуса r на разстоянiи d отъ его центра O, проведены три взаимно перпендикулярныя плоскости. Требуется опредѣлить сумму площадей круговъ, полученныхъ въ пересѣченiи шара этими плоскостями. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 46. Найти maximum x^2-y^2, если разность $ax-by$ должна оставаться постоянной. *А. Войновъ* (Харьковъ).

№ 47. Исключить α изъ уравненiй:

$$bx\mathrm{Sin}3\alpha=r^2\mathrm{Sin}\alpha$$

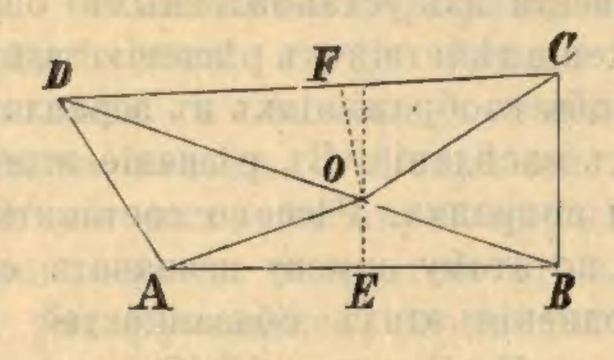
$$by\mathrm{Sin}3\alpha=r^2\mathrm{Cos}\alpha.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 48. Въ треугольникъ ABC вписанъ кругъ O, касающiйся сторонъ соотвѣтственно въ точкахъ C_1, A_1, B_1. Проводимъ произвольную къ кругу касательную MN и черезъ центръ O прямыя, параллельныя прямымъ A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 до ихъ пересѣченiя съ касательной MN въ точкахъ C_2, A_2 и B_2. Показать, что прямыя, соединяющiя эти точки съ соотвѣтственными вершинами треугольника, пересѣкутся въ одной точкѣ. *Мясковъ* (Слонимъ).

ЗАГАДКА ДЛЯ УЧЕНИКОВЪ.

Въ концахъ прямой, опредѣленной длины AB (фиг. 34); проведемъ перпендикуляръ BC и наклонную AD и отложимъ на нихъ равные отрѣзки BC=AD. Соединимъ точки D и C прямою и изъ срединъ прямыхъ AB и DC возставимъ перпендикуляры, которые пусть пересѣкутся въ точкѣ



Фиг. 34.

O. Соединивъ O съ точками A, B, C и D, имѣемъ

$$AO=OB;\ DO=DC;$$

а такъ какъ по отложенію AD=BC, то треугольники AOD и BOC равны; слѣдовательно $\angle OAD=\angle OBC$; прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства равные углы OAE и OBE, находимъ

$$\angle DAE=\angle EBC,$$

т. е. что тупой уголъ равенъ прямому. Требуется найти ошибку.

Пригоровскій (Кіевъ).

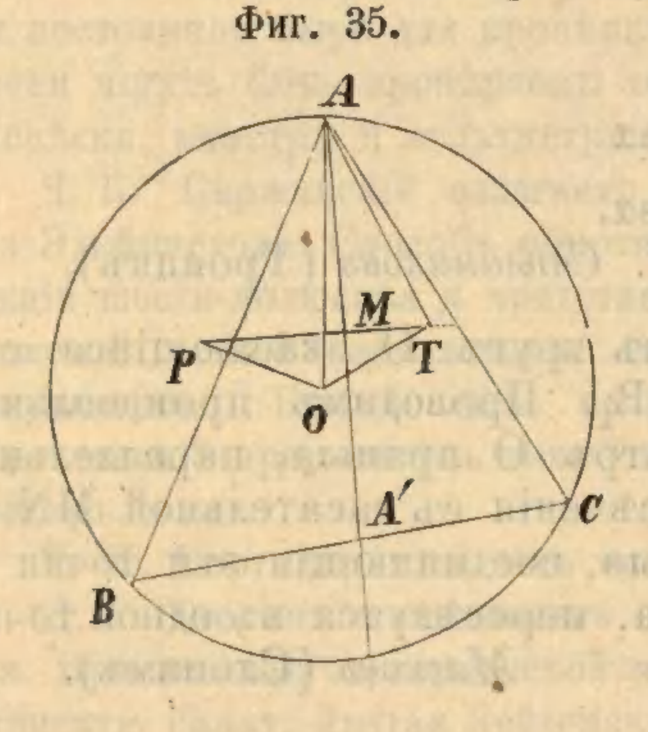
РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 435. Въ окружность, центръ которой въ O и радіусъ которой R, вписанъ треугольникъ ABC. Биссекторъ угла A пересѣкаетъ въ A_1 сторону BC и разлагаетъ треугольникъ ABC на два треугольника ABA_1 и ACA_1. Пусть P центръ окружности, описанной около одного изъ нихъ, T—центръ окружности, описанной около другого. Доказать, что

$$OP=OT=\frac{a}{b+c}R.$$

Чтобы найти центры окружностей, описанныхъ около треугольниковъ ABA_1 и ACA_1, изъ центра O—окружности описанной около треугольника ABC (фиг. 35) опустимъ перпендикуляры на AB и AC и въ срединѣ M биссектора AA′ возставимъ къ AA′ перпендикуляръ, точки пересѣченія котораго съ перпендикулярами къ AB и AC будутъ центрами P и T окружностей, описанныхъ около треугольниковъ ABA′ и ACA′. Въ треугольникѣ OPT уголъ PTO равенъ углу A′AC (по перпендикулярности сторонъ, составляющихъ эти углы). По той же причинѣ

Фиг. 35.



$$\angle OPT=\angle BAA'.$$

Такъ какъ

$$\angle BAA'=\angle CAA',$$

то и

$$\angle PTO=\angle OPT$$

и треугольникъ OPT равнобедренный, а потому PO=TO. Треугольники ATO и AA′B подобны, потому что

$$\angle B=\angle AOT \text{ и } \angle AA'B=\angle ATO.$$

Послѣдніе углы равны, такъ какъ равны углы дополняющіе ихъ до двухъ прямыхъ. Изъ подобія треугольниковъ ABA′ и AOT слѣдуетъ

$$OT:AO=A'B:AB$$

но

$$AO=R,\ A'B=\frac{ac}{b+c}$$

и

$$AB=c,$$

слѣдовательно

$$OT=OP=\frac{a}{b+c}R.$$

С. Блажко (Москва), *Н. Николаевъ* (Пенза), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ). Ученики: 1-й Спб. г. (7) *А. К.*, 2-й Тифл. г. (6) *М. А.*, Могил. г. (8) *Я. Э.*, Ворон. к. к. (7) *Г. У.* и *Н. В.*

№ 437. Рѣшить систему уравненій

$$\frac{x}{x^2+ax+b^2}+\frac{y}{y^2+ay+b^2}=\frac{1}{c}$$
$$xy=m(x+y).$$

Освободивъ первое уравненіе отъ знаменателей, приведемъ его къ виду

$$c[xy(x+y)+2axy+b^2(x+y)]=x^2y^2+axy(x+y)+a^2xy+b^2[(x+y)^2-2xy]+$$
$$+ab^2(x+y)+b^4.$$

Подставимъ сюда $m(x+y)$ вмѣсто xy, тогда, сгруппировавъ всѣ члены въ одной части, найдемъ

$$A(x+y)^2+B(x+y)+b^4=0,$$

гдѣ

$$A=b^2+am-cm+m^2,$$
$$B=ab^2+a^2m-b^2c-2b^2m-2acm.$$

Отсюда найдемъ два значенія для $x+y$. Пусть эти значенія будутъ s_1 и s_2. Тогда

$$xy=ms_1 \quad \text{или} \quad xy=ms_2.$$

Зная же xy и $x+y$, легко опредѣлить x и y изъ уравненій:

$$z^2-s_1z+ms_1=0,$$

или

$$z^2-s_2z+ms_2=0.$$

Н. Карповъ (Лубны), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *Н. Соболевскій* и *С. Блажко* (Москва), *С. Кричевскій* (Ромны). Ученики: Кам.-Под. г. (7) *Я. М.* и *К. К.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.*

№ 551. Нѣкоторое число лицъ взаимно обмѣнялись визитными карточками. Сколько было лицъ, если для этого понадобилось 50 дюжинъ карточекъ?

Если число всѣхъ лицъ x, то каждый отдаетъ $x-1$ карточку, слѣдовательно

$$x(x-1)=12.50=24.25$$

откуда

$$x=25.$$

Ученики: Кiев. р. уч. (7) *Л. А.*, Курск. г. (7) *Н. Б.*, *К. П.* и *В. Х.*, (8) *С. Г.*, Троицк. г. (7) *Н. Г.*, Тверск. р. уч. (5) *И А.*, (7) *М. Н.*, 2-й Тифл. г. (7) *М. А.*, Спб. Ек. ц. уч. (7) *В. М.*, Великол. р. уч. (6) *А. В.*, Урюп. р. уч. (7) *П. У—ъ*, Ворон. к. к. (5) *И. В.*, (7) *Н. В.* и *Г. У.*

№ 554. Рѣшить уравненiе:

$$x^4-2ax^3+x^2(a^2-A)+Aax+B=0.$$

Данное уравненiе можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$x^2(x^2-2ax+a^2)-Ax(x-a)+B=0,$$

или

$$[x(x-a)]^2-Ax(x-a)+B=0,$$

отсюда

$$x(x-a)=\frac{A\pm\sqrt{A^2-4B}}{2}$$

и, наконецъ,

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2A\pm2\sqrt{A^2-4B}}}{2}.$$

Ученики: 2-й Тифл. г. (7) *М. А.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.*, Урюп. р. уч. (7) *П. У—ъ*, Курск. г. (7) *Н. Б.*, *К. П.* и *В. Х.*

ОПЕЧАТКА.

Въ рецензiи *К. Щ.* („Начала Алгебры“ П. И. Матковскаго) на стр. 131 въ 17-ой строкѣ сверху вмѣсто слова *теоремы* должно быть *термины*.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскiй.**

Дозволено цензурою. Кiевъ, 4 Мая 1890 г.

Типо-литографiя Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и Kº.